Скрытые динамические переменные в завихренном течении баротропной жидкости

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики РАН

- Турбулентное течение баротропной жидкости описывается уравнением Навье-Стокса. Чем меньше вязкость, тем сильнее турбулентные явления в течении. В пределе исчезающей вязкости турбулентность должна быть максимальной.
- Однако при нулевой вязкости уравнения Навье-Стокса переходят в четыре уравнения Эйлера, которые не описывают турбулентности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \qquad p = p(\rho) = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

- Это означает, что четыре уравнения Эйлера не являются полной системой динамических уравнений, а представляют собой только часть динамических уравнений. Это подтверждает то обстоятельство, что многочисленные попытки получит уравнения Эйлера из вариационного принципа не привели к успеху.
- Получить уравнения из вариационного принципа удалось лишь после того, как к четырем уравнениям Эйлера в виде сторонних условий были присоединены условия Лина

$$\boxed{\partial_0 \xi + (\mathbf{v}\nabla)\xi = 0}$$

- Все семь уравнений для переменных ρ, v, ξ **могут** быть получены из вариационного принципа

$$\mathcal{A}[\xi,j,p] = \int_{V_x} \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho_0} - \rho_0 E(\rho) - p_k \left(j^k - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} d^4x,$$

- где

$$J_{\xi/x} = J(\xi_{l,k}) = \frac{\partial(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)} = \det\|\xi_{l,k}\|$$

$$\xi_{l,k} \equiv \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k} \qquad l,k = 0,1,2,3$$

- и условие $j^k = \dfrac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}$ эквив***алентно условию Лина***

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \xi_{\alpha,k} = j^k \xi_{\alpha,k} = \rho \partial_0 \xi_\alpha + \rho v^\alpha \xi_\alpha = 0$$

- Варьирование по ξ приводит к уравнению

$$\delta\xi_l: \quad -\partial_s\left(p_k\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{l,s}}\right)=0, \quad l=0,1,2,3$$

- которое может быть проинтегрировано в виде

$$\boxed{p_k=b(\partial_k\varphi+g^\alpha(\xi)\partial_k\xi_\alpha), \quad k=0,1,2,3}$$

- где $g^\alpha(\xi), \alpha=1,2,3$ суть произвольные функции, *b* есть произвольная постоянная.
- Подстановка этого интеграла в действие приводит к

$$\mathcal{A}[\xi,j,\varphi]=\int_{V_x}\left\{\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho_0}-\rho_0 E(\rho_0)-j^k(\partial_k\varphi+g^\alpha(\xi)\partial_k\xi_\alpha)\right\}d^4x,$$

- Варьирование действия по ξ приводит к уравнениям

$$\delta\xi_\alpha : \underline{\qquad\qquad} \rho_0 \Omega^{\alpha\mu}(\xi)\left(\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\nabla)\xi_\alpha\right) = 0,$$

- где

$$\Omega^{\alpha\mu}(\xi) = \left(\frac{\partial g^\alpha(\xi)}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\xi)}{\partial \xi_\alpha} \right)$$

- Однако, поскольку матрица $\Omega^{\alpha\beta}$ антисимметрична, то

$$\det\|\Omega^{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & \Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ -\Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

- Тогда уравнение превращается в

$$\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\nabla)\xi_\alpha = -\omega\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega^{\beta\gamma}(\xi) \qquad \alpha = 1,2,3$$

$$\Omega^{\alpha\mu}(\xi) = \left(\frac{\partial g^{\alpha}(\xi)}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial g^{\mu}(\xi)}{\partial \xi_\alpha}\right)$$

- где $\omega(\xi)$ есть произвольная функция. Условие Лина является частным случаем этого уравнения, когда $\Omega^{\beta\gamma}(\xi) = 0$;
- В этом случае течение является потенциальным.
- Таким образом, динамическое уравнение для переменных ξ не определено. Эти переменные являются скрытыми.

- Сделаем замену переменных

$$\rho_0(\partial_k \varphi + g^{\alpha}(\xi)\partial_k \xi_{\alpha}) = -\frac{i}{2}(\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi), \quad k = 0,1,2,3$$

$\# ($

$$\boxed{\rho_0 = j^0 = \psi^* \psi, \quad \mathbf{j} = -\frac{i}{2}(\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi)}$$

$\# ($

- Тогда после преобразований действие примет вид

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int_{V_x} \left(\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} (\psi_{\alpha}^* \partial_0 \psi_{\alpha} - \partial_0 \psi_{\alpha}^* \cdot \psi_{\alpha}) + \frac{1}{8} \left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} (\psi_{\alpha}^* \partial_{\beta} \psi_{\alpha} - \partial_{\beta} \psi_{\alpha}^* \cdot \psi_{\alpha}) \right)^2 \right) d^4x$$

$$\boxed{+ \int_{V_x} \left(-\rho E(\rho) - \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\alpha \neq \gamma=1}^{\alpha \neq \gamma=2} (\psi_{\alpha}^* \partial_{\beta} \psi_{\alpha} - \partial_{\beta} \psi_{\alpha}^* \cdot \psi_{\alpha})(\psi_{\gamma}^* \partial_{\beta} \psi_{\gamma} - \partial_{\beta} \psi_{\gamma}^* \cdot \psi_{\gamma}) \right) d^4x}$$

- После варьирования по ψ^* получаем динамическое уравнение для ψ

$$i\partial_0\psi_\alpha + \frac{1}{2}((\psi_\alpha^*\partial_\beta\psi_\alpha - \partial_\beta\psi_\alpha^*\cdot\psi_\alpha))\partial_\beta\psi_\alpha - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E(\rho))\psi_\alpha$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\beta(\psi_{3-\alpha}^*\partial_\beta\psi_{3-\alpha} - \partial_\beta\psi_{3-\alpha}^*\cdot\psi_{3-\alpha})\psi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2$$

- Это уравнение не содержит неопределенных параметров. Оно имеет решения для любых начальных значений ψ. Однако, начальные значения ρ, ***v*** не определяют начальных значений ψ.
- По этой причине уравнения для ψ содержат динамические переменные, являющиеся скрытыми для уравнений Эйлера.

- Получаем следующее выражение для скорости

$$\mathbf{v} = \frac{|\psi_1^2|\nabla\varphi_1 + |\psi_2^2|\nabla\varphi_2}{\rho} = -i\frac{|\psi_1^2|\nabla\log\frac{\psi_1}{|\psi_1|} + |\psi_2^2|\nabla\log\frac{\psi_2}{|\psi_2|}}{\psi^*\psi}$$

- Таким образом, уравнения Эйлера содержат скрытые динамические переменные, которые, ответственны, по-видимому, за турбулентные явления. При исследовании этих переменных не делалось никаких предположений. Использовались просто правила исследования недиссипативных динамических систем.
- По-видимому, скрытые переменные имеются и в уравнениях Навье-Стокса. Но они описывают диссипативную динамическую систему, для которой не существует вариационного принципа.

- Существование скрытых динамических переменных существенно изменяет подход к описанию турбулентности.
- Возможно описание скрытых переменных, являющихся вещественными

$$\rho = \psi^* \psi, \quad s_\alpha = \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

- где σ_α. суть матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Переменные *s* не могут быть выражены через переменные ρ, ***v***. Они являются скрытыми переменными. Используя динамическое уравнения для ψ можно получить динамические уравнения для *s.* В квантовой механике переменные s называются спином.

Заключение

Таким образом, при описании завихренного течения невязкой баротропной жидкости кроме плотности и скорости появляются дополнительные динамические переменные, описывающие завихренность, вмороженную в жидкость. По-видимому, при описании турбулентных явлений важен учет этих дополнительных динамических переменных. По-видимому, учет скрытых переменных важен и при описании вязкой жидкости, но здесь нет вариационного принципа, что затрудняет определение скрытых переменных.