

Гравитационно-капиллярные волны на свободной поверхности жидкого диэлектрика в тангенциальном электрическом поле

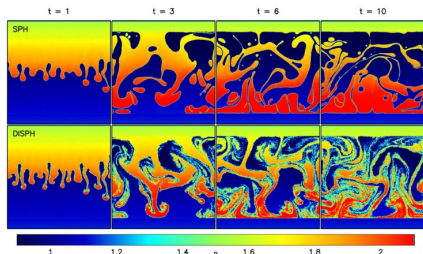
Зубарев Н.М., Кочурин Е.А.

Институт электрофизики УрО РАН

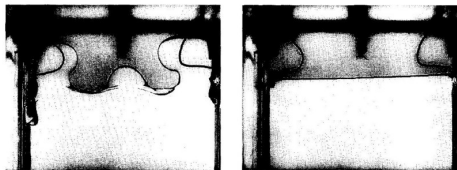
E-mail: kochurin@iep.uran.ru

Москва, 2017

Актуальность работы заключается в возможности управления движением жидкостей внешним электрическим полем.



Численное моделирование гидродинамической неустойчивости
<http://v1.jmlab.jp/~saitoh/sph/index.html>



Стабилизация неустойчивости Релея-Тейлора электрическим полем [Zahn M., Haus H.A. *Journal of Electrostatics*, 1995. 34. P. 109-162.]

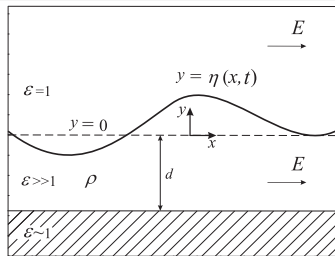
Известно, что при различных электрофизических процессах (к примеру, при горении вакуумной дуги, лазерной абляции, плазменной обработке поверхностей и т.д.) на границах облучаемого вещества могут развиваться так называемые гидродинамические неустойчивости. Под действием неустойчивостей на границе раздела может происходить формирование, а затем и отрыв жидких капель и струй, что в свою очередь приводит к эрозии поверхности облучаемого вещества, снижая энергоэффективность процесса.

Уравнения Лапласа для потенциалов

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad -d < y < \eta,$$

с условием на дне $\Phi_y = 0, \varphi_y = 0, y = -d$. На свободной поверхности должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия, соответственно,

$$\eta_t = \Phi_y - \eta_x \Phi_x, \quad y = \eta. \quad \text{Рис. 1: Геометрия задачи.}$$



$$\Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\nabla \varphi)^2 - E^2}{2\rho} - g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \eta_{xx} / (1 + \eta_x^2)^{3/2},$$

где φ – значение потенциала электрического поля на границе, ρ – плотность жидкости, ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость жидкости, будем полагать, что $\varepsilon \gg 1$. Исследуемая система является консервативной, ее полная энергия и масса жидкости сохраняются

$$H = \frac{\rho}{2} \int (\nabla \Phi)^2 d^2 r - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int [(\nabla \varphi)^2 - E^2] d^2 r, \quad \int_{-l/2}^{l/2} \eta(x, t) dx = \text{const.}$$

Описание метода

Этот подход был впервые предложен [Л.В. Овсянниковым](#) и развит в работах [В.Е. Захарова](#) и соавт. для исследования волн в океане. Метод обобщен для аналитического исследования электрогидродинамики жидкостей в работах [Н.М. Зубарева](#).

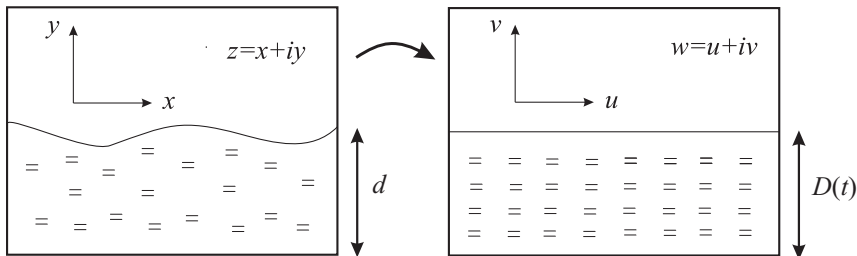


Рис. 2: Конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полосу.

В совокупности с использованием спектральных методов расчета пространственных производных и интегральных операторов развиваемый подход позволяет проводить расчеты с высокой скоростью и точностью.

Задача сводится к нахождению преобразования $\mathbf{r} = xi + yj = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j}$, где X, Y – гармонические функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа в полосе:

$$Y_{uu} + Y_{vv} = 0, \quad X_{uu} + X_{vv} = 0, \quad -D(t) < v < 0,$$

с граничными условиями: $Y(X) = \eta(x), \quad v = 0, \quad Y(u, -D(t)) = -d, \quad v = -D(t)$.

Такая задача решается аналитически! В результате можно получить связь между X и Y , т.е. задать форму границы:

$$X(u, t) = X_0(t) + u - \hat{T}Y(u, t),$$

где $X_0(t)$ – некоторая функция времени, \hat{T} – интегральный оператор, действие которого определяется в Фурье-пространстве, как $\hat{T}_k = i \coth(kD)$.

Уравнения движения границы жидкости можно записать как

$$Y_t = q(t)Y_u + \left[1 - \hat{T}Y_u\right] \frac{\hat{R}\Psi_u}{J} - Y_u \hat{T} \left(\frac{\hat{R}\Psi_u}{J}\right), \quad (1)$$

$$\Psi_t = q(t)\Psi_u - \frac{1}{2J} \left[\Psi_u^2 - \hat{R}\Psi_u^2\right] - \Psi_u \hat{T} \left(\frac{\hat{R}\Psi_u}{J}\right) - P + \frac{1-J}{2J}, \quad (2)$$

где функция $\Psi(u, t)$ определяет значение потенциала скорости на границе $v = 0$, $J = X_u^2 + Y_u^2$ – якобиан конформного преобразования, $q(t)$ – функция времени, отражающая галилеевскую инвариантность системы, связана с определением $X_0(t)$, P – давление на границе жидкости, связанное с гравитационными и капиллярными силами. Последнее слагаемое в уравнении (2) ответственно за влияние тангенциального электрического поля [N.M. Zubarev, O.V. Zubareva Phys. Rev. E 2010]

Далее рассмотрим случай глубокой жидкости $\lambda \ll D$. Введем также переменные Дьяченко

$$R(u, t) = 1/Z_u, \quad V(u, t) = i\Phi_u/Z_u.$$

С учетом силы тяжести и капиллярности исходная система уравнений принимает вид

$$Q_t = i(UQ_u - \frac{1}{2}U_u Q),$$

$$V_t = i(UV_u - Q^2 B_u) + g(Q^2 - 1) - 2\sigma Q^2 \hat{P}(Q_u \bar{Q} - \bar{Q}_u Q)_u,$$

где g, σ — безразмерные ускорение свободного падения и коэффициент поверхностного натяжения соответственно, а функции Q, V, B определены следующим образом

$$Q = \sqrt{R}, \quad U = \hat{P}(V\bar{Q}^2 + \bar{V}Q^2), \quad B = \hat{P}(V\bar{V} - \beta(Q\bar{Q})^2),$$

β — безразмерная напряженность внешнего электрического поля.

В работах [N.M. Zubarev, Phys. Lett. 2004, JETP Let. 2009] показано, что в случае большой напряженности поля нелинейные поверхностные волны могут распространяться без искажений в направлении, либо против направления внешнего поля.

Предел сильного электрического поля реализуется в случае $\beta^2 = (E/E_0)^2 \gg 1$, где $E_0^2 = \sqrt{\sigma g \rho} / \epsilon_0 \epsilon$. В безразмерном виде фазовая скорость поверхностных волн имеет вид

$$V_p(k, \beta) = \omega/k = \sqrt{k^{-1} + \beta^2 + k}.$$

Внешнее электрическое поле действительно оказывает стабилизирующее действие на динамику нелинейного возмущения поверхности, см. Рис. 3.

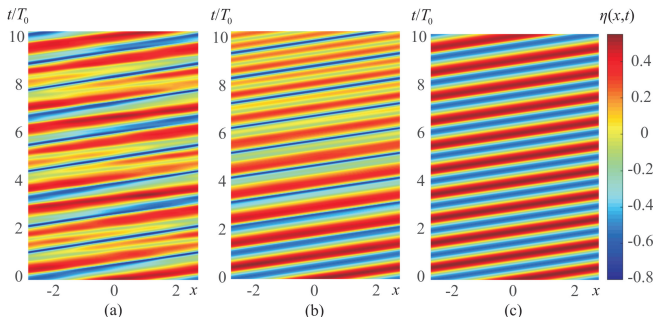


Рис. 3: Эволюция поверхности жидкости для начальных условий $A = 0.5$, $k_1 = 1$ для различных значений внешнего поля: (a) $\beta = 0$, (b) $\beta^2 = 10$, (c) $\beta^2 = 100$.

Отметим, что исследуемое возмущение поверхности является сильнонелинейным, поскольку амплитуда в 0.5 является почти предельной для существования поверхностной волны. При больших амплитудах возмущений на границе жидкости могут происходить самопересечения и формирование воздушных пузырьков в жидкости, как это показано на рисунке.

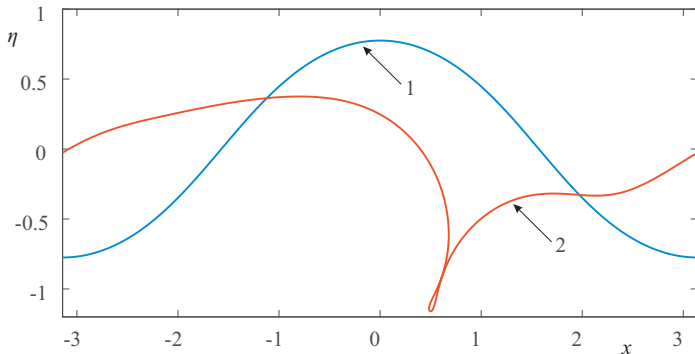


Рис. 4: Результат численного моделирования для параметров $A = 0.65$, $\beta = 0$, $k_1 = 1$. Синяя кривая "1" показывает форму границы в начальный момент времени, красная кривая "2" соответствует границе жидкости в момент формирования пузырька $t/T_0 \approx 0.76$.

Упругое взаимодействие волн в пределе сильного поля

Взаимодействие встречных волн в пределе сильного поля является упругим, т.е. энергия и импульс каждой из взаимодействующих волн сохраняются [Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин, Письма в ЖЭТФ, 2014].

К концу расчетного интервала на границе жидкости сформировалась область с крутым волновым фронтом Рис. 5(а). В этой точке давление, оказываемое со стороны электрического поля, претерпевает разрыв Рис. 5(б), а динамическое давление увеличивается практически на порядок Рис. 5(с).

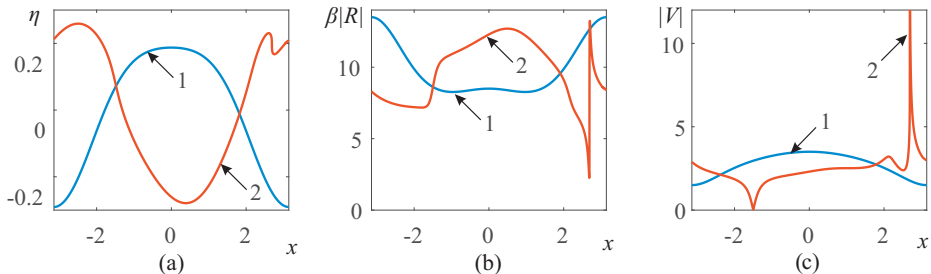


Рис. 5: Форма поверхности (а), напряженность поля на границе (б) и скорость границы жидкости (с) показаны в начальный момент времени "1" и в конце расчетного интервала "2", $t/T_0 \approx 4.61$.

Формирование сингулярности

В начале расчета величина $\beta|R|$ ведет себя достаточно плавно. С течением времени взаимодействие поверхностных волн приводит к формированию узких пространственных областей (ударных фронтов), в которых электрическое поле меняется скачкообразно. В целом, формирование области резкого изменения давления электрического поля на границе напоминает распространение классической ударной волны, в которой испытывает скачок давление и плотность газа.

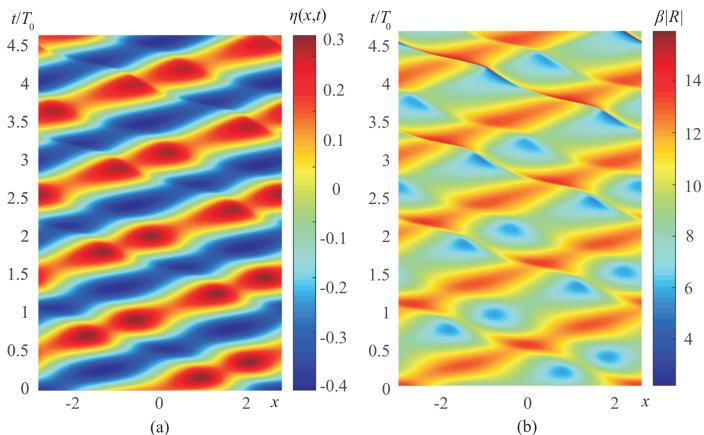


Рис. 6: Показаны временные зависимости (а) поверхности жидкости, (б) величины $\beta|R|$, определяющей локальную напряженность поля на границе.

Формирование сингулярности

О сингулярном поведении системы свидетельствует спектр функции $Y(u, t)$, представленный на Рис. 7. Можно видеть, что с течением времени распределение гармоник в спектре $Y(u, t)$ приобретает степенной характер. Показатель степени в спектре близок к двум, это свидетельствует о формировании сингулярности во второй пространственной производной функции Y .

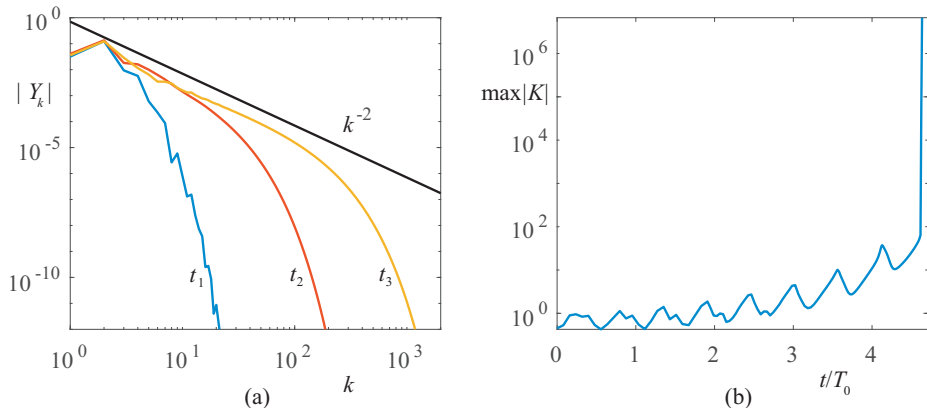


Рис. 7: Показаны спектр функции $Y(u, t)$ в последовательные моменты времени (а) $t_1 = 0$, $t_2/T_0 \approx 2.35$, $t_3/T_0 \approx 4.48$, прямая линия соответствует степенному закону $|Y_k| \sim k^{-2}$, максимум модуля кривизны поверхности в зависимости от времени (б).

Можно сразу видеть главное отличие в динамике системы от случая сильного поля – отсутствие тенденции к формированию разрыва в напряженности поля.

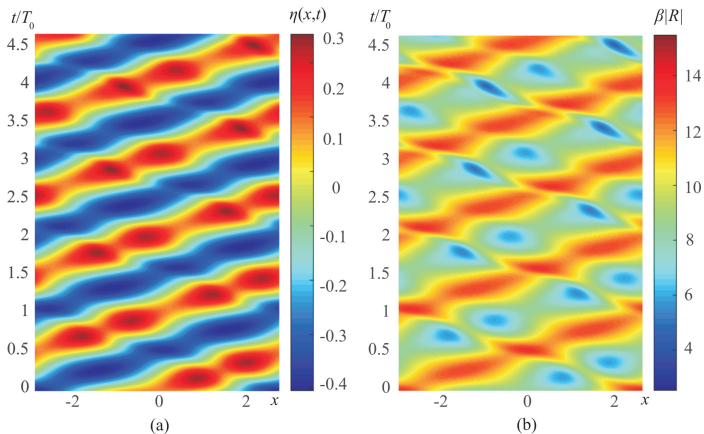


Рис. 8: Показаны временные зависимости (а) поверхности жидкости, (б) величины $\beta|R|$, определяющей локальную напряженность поля на границе.

На развитых стадиях эволюции системы происходит генерация капиллярных волн. Этот процесс приводит к тому, что графики, изображенные на Рис. 9, выглядят практически хаотическими. В действительности наблюдаемая на Рис. 9 картина свидетельствует о том, что внешнее тангенциальное электрическое поле может приводить к развитию и ускорению капиллярной турбулентности [Захаров В.Е., Филоненко Н.Н., ПМТФ, 1967].

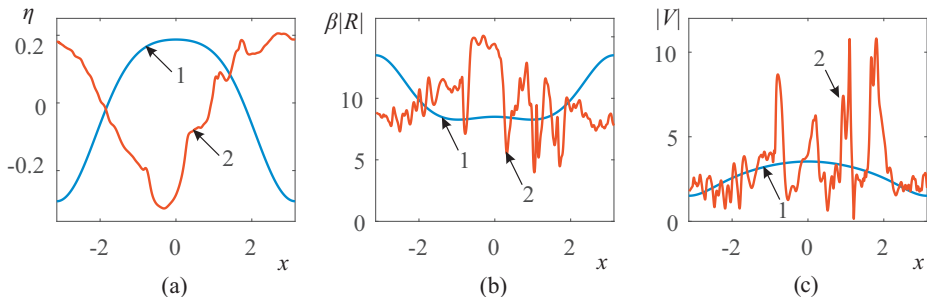


Рис. 9: Форма поверхности (а), напряженность поля на границе (б) и скорость границы жидкости (в) показаны в начальный момент времени “1” и в конце расчетного интервала “2”, $t/T_0 \approx 38.43$.

В заключение приведем пример моделирования взаимодействия встречных периодических волн в случае, когда внешнее электрическое поле отсутствует, $\beta = 0$. Оказывается, что в этой ситуации генерация капиллярных волн происходит очень медленно, а в сравнении с предыдущим расчетом практически отсутствует.

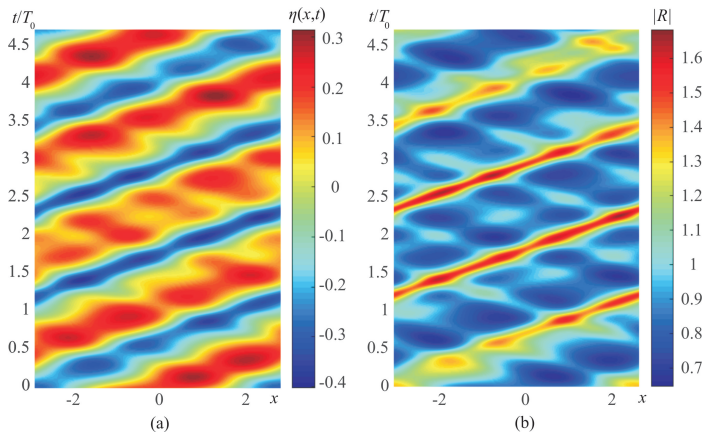


Рис. 10: Показана эволюция (а) поверхности жидкости, (б) величины $|R|$ для $\beta = 0$.

На протяжении всей эволюции системы не наблюдалось критического увеличения кривизны поверхности, а спектр функции $Y(u, t)$ оставался локализованным. Таким образом, механизм формирования каскада мелкомасштабных капиллярных волн, наблюдаемых в предыдущем численном эксперименте, связан именно со взаимодействием встречных нелинейных волн под действием сильного внешнего электрического поля.

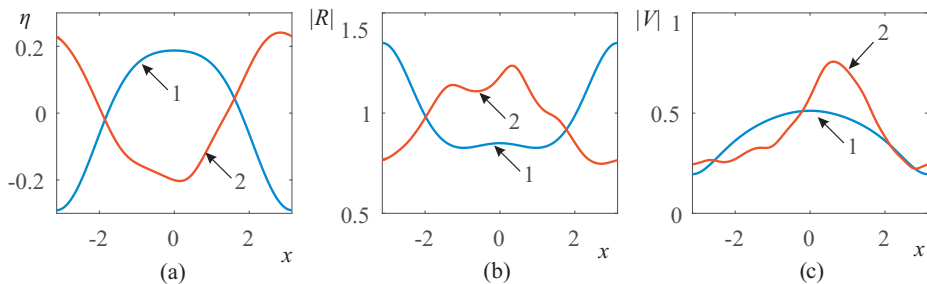


Рис. 11: Форма поверхности (а), напряженность поля на границе (б) и скорость границы жидкости (с) показаны в начальный момент времени “1” и в конце расчетного интервала “2”, $t/T_0 \approx 1.12 \times 10^3$

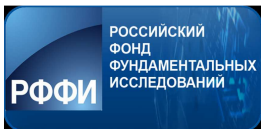
Выводы и заключение

- 1. Используемый метод прямого численного моделирования позволяет тождественным образом свести исходную пространственно двумерную задачу к одномерной, что в совокупности с использованием спектральных методов расчета пространственных производных и операторов Гильберта позволяет проводить расчеты с высокой точностью и скоростью.
- 2. Взаимодействие встречных нелинейных волн в пределе сильного поля (оно является упругим в этом случае) приводит к формированию сингулярностей – точек, в которых электростатическое давление претерпевает разрыв, а скорость жидкости существенно возрастает. Спектр поверхности приобретает степенной вид, $Y_k \sim k^{-2}$, что свидетельствует о сингулярном поведении кривизны границы.
- 3. В случае конечного электрического поля учет капиллярности и силы тяжести, приводит к сглаживанию области резкого скачка давления на начальных стадиях взаимодействия встречных нелинейных волн. На больших временах происходит интенсивное излучение мелкомасштабных капиллярных волн, приводящее к хаотизации эволюции системы. В отсутствие внешнего поля генерация капиллярных волн очень мала, а на сравнимых временных масштабах практически не заметна.

Таким образом, обнаруженный в работе механизм взаимодействия встречных нелинейных волн, приводивший в пределе сильного поля к формированию особенностей, может ускорять развитие капиллярной турбулентности поверхности жидкости.

Благодарю за внимание!

Авторы выражают искреннюю благодарность Е.А. Кузнецову, указавшему на аналогию с акустической турбулентностью, а также П.М. Лушникову и В.П. Рубану за обсуждение результатов численного моделирования.



Совет по грантам Президента
Российской Федерации
для государственной поддержки
молодых российских ученых